1 Ⅱ. 8/11/2016

Είδη σύγκλισης

Ισχυρή σύγκλιση
Ασθενής σύγκλιση
Σύγκλιση σημείο προς σημείο
Ομαλή σύγκλιση

Φαινόμενο Gibbs

$\sum_{i=1}^{n} f_i e_i(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, $f_i = \langle e_i | f \rangle$

$\frac{df(x)}{dx}$, $\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{de_i(x)}{dx}$

Σειρές Fourier

Οι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $\left(\langle f|f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2 \omega(x)\,dx\right)$ $L^2_w(a,b)$, (είναι χώρος Hilbert) {αυτή είναι η συνεχής περίπτωση. Σε διακριτή, θα είχαμε, αντί για $\int$, άθροισμα.

ορίζονται σε ένα διάστημα $[-\pi,\pi]$ ή $[0,2\pi]$.

Το ορθοκανονικό σύστημα: (i) $e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$, $m\in\mathbb{Z}$, $i^2=-1$

ή (ii) $c_0 = \frac{1}{2\pi}$, $c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$, $s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$ και $w(x)=1$

ομαλή προσέγγ. συναρτ.

1 $f(x,y) \simeq \sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{ln} x^l y^n \Rightarrow \dots \Rightarrow f(r,\theta)\big|_{r=1} = g(\theta) \simeq \sum_{m=-N}^{N} g_m \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}}$.

Δηλ. Η $g(\theta)$ μπορεί να γραφεί ως επαλληλία των $e_m(\theta) = \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}}$

Η μιγαδική αναπαράσταση

Μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e_m(x), \quad f_m = \int_{-\pi}^{\pi} e_m^*(x)\cdot f(x)\,dx \quad (1)$$

Άρα οποιαδήποτε συνάρτηση θα μπορώ να τη γράψω ως ένα άπειρο άθροισμα

Η ανάπτυξη κατά Fourier της (1) παραμένει αναλλοίωτη αν $x \to x+2\pi$ με την προϋπόθεση ότι η $f(x)$ είναι περιοδική συνάρτηση, δηλ. $f(x) = f(x+2\pi)$.

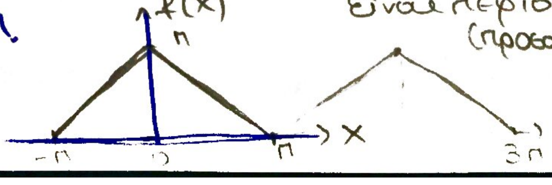
Άρα η (1) ισχύει κ' στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ εφόσον η $f(x)$ είναι περιοδική

πχ. Να αναπτυχθεί κατά Fourier η συνάρτηση.

$f(x) = \pi - |x|$, $-\pi \le x \le \pi$.

Είναι περιοδική, αφού: (προσοχή! αλλάζει κατεύθυνση)

→ Σχηματικά:



Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ και έχουμε ότι:

$$f_m = \int_{-\pi}^{\pi} e_m^*(x)\, f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e_m^*(x)(\pi-|x|)\,dx = \int_{-\pi}^{0} e_m^*(x)(\pi+x)\,dx + \int_{0}^{\pi} e_m^*(x)(\pi-x)\,dx$$

$$\Rightarrow f_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}\,dx}_{0} + \int_{-\pi}^{0} x e^{imx}\,dx - \int_{0}^{\pi} x e^{-imx}\,dx\right) \xrightarrow[\text{παραγ...}]{m\neq 0}$$

$$\Rightarrow f_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{im}\cdot e^{-imx}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{m^2}\cdot e^{-imx}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{im}\cdot e^{-imx}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{m^2}e^{-imx}\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

και εφόσον $e^{im\pi}=(-1)^m$ έχουμε τελικά ότι: $f_m = \begin{cases} \dfrac{4}{m^2\sqrt{2\pi}}, & m \text{ περιττός} \\ 0, & m \text{ άρτιος} \end{cases}$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{0} x\,dx - \int_{0}^{\pi} x\,dx\right) \Rightarrow f_0 = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}$$

αφού οι όροι, άρα μηδενίζονται

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}\left(\frac{4}{m^2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{imx} + \frac{4}{m^2\sqrt{2\pi}}e^{-imx}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 + 8\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 + 8\sum_{m=1,3,5,\dots}\frac{\cos(mx)}{2}\right] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 + 8\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\cos[(2l+1)x]}{(2l+1)^2}\right]$$

Η σειρά $\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\cos[(2l+1)x]}{(2l+1)^2}$, συγκλίνει ομαλά στην $f(x)$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$.

Άρα δε θα παρατηρηθεί το φαινόμενο Gibbs για την $f(x)$ (αφού ενώ συγκλίνει ομαλά, δεν έχει σημεία ασυνέχειας).

Παρατήρηση: Αν τώρα η $f(x)=\pi-|x|$, επεκταθεί σ'όλη την πραγματική ευθεία με περίοδο 2π, η πιο πάνω ανάπτυξη με Fourier θα ισχύει και για την επεκταθείσα συνάρτηση.

Η τριγωνική συνάρτηση είναι περιοδική συνάρτηση, άρα αναπτύσσεται κατά Fourier σ'όλη την πραγματική ευθεία. (Δεν είναι τετραγωνική)

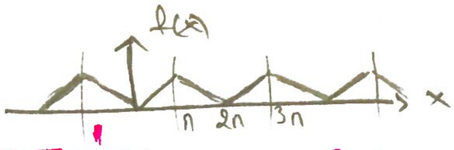
(κάποιες) Ασκήσεις: (Θα αναρτηθούν και στη σελίδα – στο φυλλάδιο ασκήσεων)

1) Να παρασταθεί γραφικά η άρτια συνάρτηση: $f(x)=|\sin x|$ και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier.

2) Να παρασταθεί γραφικά η $f(x)=|x|$, και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier, με την υπόθεση ότι είναι περιοδική: $f(x)=f(x+2\pi)$

8/11/2011

σχηματικά για τη (2) :



Θεωρία Τελεστών

(νέο κεφάλαιο) (3ο)

Ορισμός: Ένας **τελεστής** είναι μία απεικόνιση ενός δ.χ. σε έναν άλλον δ.χ. Ορίζονται από τη δράση τους, δηλ. ο κανόνας με τον οποίον από ένα διάνυσμα $|f\rangle$ πηγαίναμε σε ένα διάνυσμα $|g\rangle$ μέσω της δράσης του τελεστή A, δηλ.

$$|f\rangle \longrightarrow |g\rangle = A|f\rangle, \quad A: \text{τελεστής.}$$

πχ.1 Έστω ο $\mathbb{R}^3$, με $|x\rangle = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, τότε $|y\rangle = a|x\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Ο a είναι ο τελεστής "σταθερά" (πολλαπλασιαστικός τελεστής).

πχ.2 Έστω ο συναρτησιακός χώρος, G, των αναλυτικών συναρτήσεων (ο χώρος των συναρτ. οι οποίες έχουν οποιασδήποτε τάξης παράγ.) είναι δ.χ. (αφού υπάρχει κλειστότητα) και ορίζουμε τον τελεστή της παραγώγισης. $|f\rangle \longrightarrow |g\rangle = D|f\rangle$ ή $g(x) = \frac{d}{dx} f(x)$.

Αν $f(x) = x$, τότε $g(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} x = 1$.

Ειδικές Περιπτώσεις

1) Αν $A|f\rangle = 0$, $\forall |f\rangle \in S$, τότε ο τελεστής καλείται **μηδενικός** και γράφεται $A = 0$.

2) Αν $A|f\rangle = |f\rangle$, $\forall |f\rangle \in S$, ο A είναι ο **ταυτοτικός** τελεστής και γράφεται $A = I$

πχ. Στο χώρο των πραγματικών συναρτήσεων $|f\rangle = f(x)$, αν $f(x) = e^x$ και ο τελεστής $D = \frac{d}{dx}$.

$\frac{df}{dx} = Df = e^x$ ή $D|f\rangle = |f\rangle$. Όμως το προηγούμενο ισχύει μόνο για την $f(x) = e^x$ και όχι για κάθε συνάρτηση του χώρου, άρα ο $D = \frac{d}{dx}$, δεν είναι ο ταυτοτικός.

Ιδιότητες:

1) Δύο τελεστές A και B είναι ίσοι, αν $A|f\rangle = B|f\rangle$, $\forall |f\rangle \in S$.

2) Για έναν τελεστή A και σταθερά $a \in \mathbb{C}$, ορίζουμε τον $B = Aa$ ώστε $B|f\rangle = Aa|f\rangle = A(a|f\rangle) = A|f'\rangle$, όπου $|f'\rangle = a|f\rangle$.
Όμοια $C = aA$, τότε: $C|f\rangle = aA|f\rangle = a|g\rangle$, όπου $|g\rangle = A|f\rangle$.

Παρατήρηση: Η σειρά έχει σημασία!

3) Το άθροισμα δύο τελεστών είναι τελεστής και ορίζεται ως
$C = A + B$. $C|f\rangle = (A+B)|f\rangle = A|f\rangle + B|f\rangle = B|f\rangle + A|f\rangle = (B+A)|f\rangle$.
(το $|f\rangle$ είναι τυχαίο, άρα ισχύει $\forall |f\rangle$)
Άρα $A + B = B + A$, αφού ισχύει $\forall |f\rangle \in S$.

4) Για δύο τελεστές A και B, ορίζουμε $C = AB$ ώστε:
$C|f\rangle = AB|f\rangle = A(B|f\rangle) = A|g\rangle$, όπου $|g\rangle = B|f\rangle$.

Παρατήρηση! Οι πράξεις γίνονται από τα δεξιά προς τα αριστερά.
Γενικά $AB \neq BA$, άρα η σειρά έχει σημασία.

π.χ. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $|f\rangle = f(x)$ και για $A = \frac{d}{dx}$, $B = x$. τότε έχουμε:

- $AB|f\rangle = \frac{d}{dx}(x f(x)) = f(x) + x\frac{df(x)}{dx} = |f\rangle + BA|f\rangle$.
- $BA|f\rangle = x\frac{df}{dx} \neq AB|f\rangle$.

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να έχουμε $AB = 0$, ακόμα και αν $A, B \neq 0$.

5) Ένας τελεστής ονομάζεται "1-1" αν $A|f\rangle = A|g\rangle \Rightarrow |f\rangle = |g\rangle$, δηλ. η εικόνα (η έξοδος) $A|f\rangle$ προσδιορίζεται πλήρως από το αρχικό διάνυσμα $|f\rangle$.

π.χ. Για μια συνάρτηση $f(x)$ και τον τελεστή $D = \frac{d}{dx}$.
$D|f\rangle = \frac{df(x)}{dx}$ και $D(f(x) + a) = \frac{d}{dx}(f(x) + a) = \frac{df(x)}{dx}$, $a \in \mathbb{R}$.
Γενικά $|f\rangle \neq |f\rangle + a$, άρα η παράγωγος δεν είναι 1-1 τελεστής.

Μ.Φ. 8/11/20

6) Αν ένας τελεστής είναι 1-1, τότε υπάρχει και ο αντίστροφος και συμβολίζεται: A^{-1}, ώστε $|g\rangle = A|f\rangle \Leftrightarrow |f\rangle = A^{-1}|g\rangle$.
Τότε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
Πράγματι, αν ισχύει $|g\rangle = A|f\rangle$ και $|f\rangle = A^{-1}|g\rangle$, τότε
$|f\rangle = A^{-1}|g\rangle = A^{-1}A|f\rangle$ (ταυτοτικός) ή $I|f\rangle = AA^{-1}|f\rangle$.
Άρα $AA^{-1} = I$, όμοια δείχνουμε ότι $A^{-1}A = I$

πχ. Έστω $A = \int_0^x dx'$, $0 \leq x \leq 1$, δηλαδή η δράση του A στο χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων να είναι:
$A|f\rangle = \int_0^x f(x')dx'$. και θεωρούμε τον $B = \frac{d}{dx}$, τότε:

$$BA|f\rangle = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x')dx'\right) = f(x) = |f\rangle.$$

$$AB|f\rangle = \int_0^x \frac{d}{dx'} f(x')dx' = f(x) - f(0) = |f\rangle - f(0)$$

Άρα Γενικά $AB \neq BA$ και $AB \neq I$.

Παρατήρηση: Αν $f(0) = 0$, έχουμε $AB = BA$. Υπάρχει ο αντίστροφος και έχουμε $B = A^{-1} = \frac{d}{dx}$.

Παρατήρηση: Για να υπάρχει ο αντίστροφος ενός τελεστή πρέπει:
a) Να υπάρχει $|h\rangle^{\in S}$, $\forall |f\rangle \in S$ τ.ω. $|h\rangle = A|f\rangle$.
b) $A|f\rangle = A|g\rangle \Rightarrow |f\rangle = |g\rangle$. (1-1).

• Για το προηγούμενο π.χ. αν $g(x) = x+1$, με $g(x) = \int_0^x f(x')dx'$ δεν υπάρχει $f(x)$ που να ικανοποιεί αυτή τη σχέση, αφού αναγκαστικά $g(0) = 0$.

! Βλέπω τις ασκήσεις του φυλλαδίου.